

Studio perturbativo multiscala per processi di reazione diffusione definiti su rete

Candidato: Filippo Miele, *filippo.miele@stud.unifi.it*

Relatore: Duccio Fanelli, *duccio.fanelli@unifi.it*

Correlatore: Francesca Di Patti, *francesca.dipatti@unifi.it*

Il presente lavoro di tesi ha come oggetto di studio i processi di formazione di pattern in modelli di reazione e diffusione definiti su grafo complesso. Il primo capitolo è dedicato a rivisitare la teoria dell'instabilità di Turing per un sistema a due specie interagenti definite su supporto ordinario: perturbando un sistema vicino al suo stato di equilibrio omogeneo, si può indurre una rottura spontanea della simmetria che induce la formazione di pattern spazio-temporali auto-organizzati nel regime asintotico dell'evoluzione. L'analisi di stabilità consente di delineare le condizioni per le quali il processo di instabilità di Turing può avere luogo. Nel Capitolo 1, la teoria viene estesa al caso generico in cui il supporto spaziale sia discreto di tipo grafo, un contesto descrittivo che risulta più appropriato per molteplici applicazioni in ambito fisico, biologico e sociale. Particolare attenzione è stata posta su alcuni aspetti topologici dei grafi che ospitano il sistema di reazione-diffusione, evidenziando come il grado di asimmetria della rete costituisca un fattore cruciale sia per l'insorgenza di instabilità alla Turing che per il tipo di pattern che può manifestarsi.

Una caratterizzazione completa del pattern che emerge è, però, possibile solamente estendendo l'analisi oltre il regime lineare. A questo scopo è possibile impiegare una tecnica perturbativa di tipo multiscala per un sistema posto vicino alla soglia di criticità. La teoria classica prevede che l'introduzione di una piccola perturbazione nei parametri di reazione, determini le scale spazio-temporali che governano l'evoluzione del modo più instabile, descritto in termini di un fattore d'ampiezza complesso che modula la soluzione del problema all'ordine lineare. L'equazione che governa la dinamica del fattore d'ampiezza nel caso di un supporto continuo risulta essere un'equazione di Ginzburg-Landau a coefficienti complessi.

Muovendo quindi dal risultato classico, abbiamo esteso la teoria al caso generale di un supporto spaziale discreto di tipo grafo diretto. La teoria è stata testata con riferimento al modello del Brusselatore, che ammette due soluzioni omogenee dai comportamenti dinamici distinti: il punto fisso omogeneo e il ciclo limite.

Lavorando in un intorno della soluzione di punto fisso, la tecnica delle scale multiple conduce ad una equazione di Stuart-Landau per il fattore d'ampiezza, aprendo lo studio ad una caratterizzazione analitica completa del pattern che emerge nel regime non lineare.

Successivamente, abbiamo proceduto ad estendere l'analisi perturbando la soluzione omogenea di ciclo limite, ovvero agendo su un sistema di oscillatori accoppiati ospitati su una rete direzionata. Lavorando nell'ipotesi di debole accoppiamento diffusivo, la tecnica multiscala ha condotto ad una equazione di Ginzburg-Landau per il fattore d'ampiezza complesso. Tramite un'analisi di stabilità lineare, sono state dedotte le condizioni per cui una soluzione omogenea globalmente sincronizzata possa essere resa instabile da una perturbazione esterna, ponendo l'attenzione sul ruolo della topologia della rete orientata come fattore determinante per l'insorgere dell'instabilità. Il pattern in ampiezza che si delinea è immagine diretta del modo reso instabile dalla perturbazione. Procedendo nell'analisi abbiamo derivato, con semplici argomenti di autoconsistenza, una soluzione analitica approssimata per l'equazione di Ginzburg-Landau complessa definita su rete.