

Random walk su rete : competizione fra trappole

Relatore : Franco Bagnoli
(franco.bagnoli@gmail.com)

Candidata : Giulia Cencetti
(giuliacencetti@gmail.com)

I processi di random walk su rete rappresentano un campo della fisica emergente ed estremamente interessante, grazie anche alla notevole applicabilità a sistemi reali. Un caso particolarmente importante è quello in cui il cammino termina se incontra uno o più nodi specifici, detti *trappole*. Si tratta dell'estensione al caso delle reti del problema dei bordi assorbenti per camminatori casuali su reticoli regolari.

In questo lavoro di tesi discutiamo, con tecniche analitiche, gli effetti di interazione fra trappole, dovuti al fatto che, per esempio, un nodo assorbente può “schermarne” un altro. Più specificatamente il lavoro si è concentrato su una prioritarizzazione delle trappole, in termini di efficacia di assorbimento, ed in funzione della topologia della rete ospitante. Ci concentriamo inizialmente sullo studio dei tempi di primo passaggio, fornendo una stima, alternativa a quelle già note in letteratura, del tempo medio di primo arrivo in un nodo (trappola) di una rete complessa non ridicibile. I metodi esposti sfruttano il fatto che il random walk su rete è schematizzabile come un processo di Markov. Le formulazioni muovono dalla conoscenza della matrice di adiacenza relativa alla rete in esame, unico requisito necessario per procedere alla stima.

Per testare l'efficacia delle stime proposte analizziamo preliminarmente un problema matematico, presentato sotto forma di gioco, *Penney's game*, dall'omonimo matematico che lo propose nel secolo scorso. Il gioco può essere interpretato come un processo stocastico su rete asimmetrica, i cui nodi rappresentano sottosequenze di lunghezza arbitraria, ricavate da una sequenza di elementi binari estratti con uguale probabilità. Secondo questa riformulazione del problema, studiare le correlazioni fra sottosequenze distinte equivale a caratterizzare le proprietà di trasporto sul grafo diretto associato. Assegnando poi alle sottosequenze di interesse il ruolo di trappole all'interno della rete, ricaviamo con un approccio analitico alcuni risultati già noti sulle sequenze binarie. Ci soffermiamo poi sulla probabilità di vittoria nel gioco di Penney, coincidente con la probabilità che una particolare sottosequenza appaia prima di un'altra all'interno della sequenza binaria casuale. Stimiamo anche questa grandezza ripensando il processo in termini di random walk su rete diretta, in questo caso con due trappole in competizione. Estendiamo poi il meccanismo di ricerca competitiva al contesto più generale dei processi di Markov. Focalizziamo inizialmente la nostra attenzione su un processo riconducibile, nel limite continuo, a un processo di diffusione con drift. Per tale processo, a partire dall'equazione di Fokker-Planck, è possibile ricavare le probabilità di assorbimento delle due trappole in funzione delle caratteristiche intrinseche del processo. Consideriamo infine una generalizzazione dello studio a random walk su supporto discreto, eterogeneo e diretto, condensando gli effetti di interferenza mutua fra trappole in una formula analitica, che tiene conto unicamente dello spettro dell'operatore Laplaciano associato al grafo diretto che ospita il processo di diffusione.

Random walk on graphs : traps competition

Relatore : Franco Bagnoli
(franco.bagnoli@gmail.com)

Candidata : Giulia Cencetti
(giuliacencetti@gmail.com)

The random walk processes on graphs represent an extremely interesting emerging sector of physics, also because of its large applicability to real systems. The processes where the walker stops after encountering some specific nodes (also called *traps*) in his/her path are of particular interest. This represents the extension of the absorbing boundaries problem for random walkers on lattices to the case of networks. In this thesis we discuss, with analytical techniques, the interaction effects among traps, due for example to the fact that an absorbing node can “shield” another one. More specifically, this work focuses on prioritizing the traps, in terms of their absorbing efficiency, in function of the topology of the network. We initially introduce the first passage times, giving an evaluation, alternative to those already known in literature, of the mean first passage time for a trap-node of a complex irreducible network. The methods developed for this evaluation exploit the fact that random walks on graphs can be thought as Markov processes. The methods only require the knowledge of the adjacency matrix of the network.

To test the efficiency of those evaluations, we previously analyze a mathematical problem, presented as a game, the *Penney's game*, from the mathematician Walter Penney who invented it in 1969. The game can be thought as a stochastic process on an asymmetric network, where the nodes represent subsequences of an arbitrary length, coming from a binary sequence where the elements occur with the same probability. According to this reformulation of the problem, studying the correlations between subsequences means characterizing the transport features on the direct graph associated to the Penney's game. Then, introducing the traps in the network, we obtain, with an analytical approach, some already known results about binary sequences. We specifically focus on the winning probability in the Penney's game, corresponding to the probability that a particular subsequence occurs before another in a random binary sequence. We evaluate also this quantity studying the process as a random walk on a direct graph, now with two traps in competition between them. We extend the competitive research mechanism to the more general context of Markov processes. We initially address the case of the random walk on a particular network which can be identified, in the continuum limit, with a diffusion-drift process. In this case, using the Fokker-Planck equation, it is possible to derive the absorbing probabilities of the two traps as a function of the intrinsic characteristics of the process.

We finally consider a generalization of the method to random walks on graphs, deriving an analytical formula for the effects of interference among traps. The formula takes into account only the spectrum of the Laplacian operator associated to the direct graph where the process takes place.