

Tecniche di Teoria dei Campi per gli Isolanti Topologici Tridimensionali

Candidato: *Jacopo Sisti*

Relatore: *Dott. Andrea Cappelli*

Gli isolanti topologici fanno parte dei cosiddetti *stati topologici della materia*, caratterizzati dalla presenza di un bulk massivo e di stati a massa nulla sul bordo. La prima parte della tesi introduce lo stato topologico ad oggi meglio compreso che si realizza nell'*effetto Hall quantistico* (QHE). Questo sistema bidimensionale di elettroni a bassissime temperature, immerso in un forte campo magnetico, possiede una conduttività trasversa che è quantizzata in unità di e^2/h in modo sorprendentemente preciso. Le proprietà di universalità permettono di descrivere le eccitazioni del sistema mediante teorie di campo effettive di bassa energia. Le eccitazioni di bulk sono descritte dalla teoria di Chern-Simons in (2+1) dimensioni, mentre le eccitazioni di bordo, chirali e a massa nulla, sono descritte da teorie di campo conformi (CFT). In questa teoria, l'anomalia chirale esprime la non conservazione della carica elettrica al bordo, che è compensata dalla corrente Hall di bulk: quindi l'anomalia si cancella nel sistema complessivo.

Gli isolanti topologici bidimensionali sono stati modellizzati con due stati Hall con chiralità e spin opposti che realizzano un sistema invariante sotto inversione temporale \mathcal{T} . Poiché le eccitazioni di bordo chirali e antichirali possono interagire e diventare massive, queste fasi possono essere instabili. È stato dimostrato da Fu, Kane e Mele che un numero dispari di coppie chirali-antichirali di stati di bordo è stabile mentre un numero pari è instabile (classificazione \mathbb{Z}_2). L'argomento si basa sulla degenerazione ineliminabile degli stati di spin semintero in presenza di simmetria \mathcal{T} (*degenerazione di Kramers*). La stabilità può anche essere discussa utilizzando la funzione di partizione delle eccitazioni di bordo.

Gli isolanti topologici tridimensionali non sono immediatamente simili agli stati Hall poiché in tre dimensioni non esistono i livelli di Landau. Tuttavia mediante la fase di Berry è possibile caratterizzare i vari sistemi in termini di un numero topologico, invariante sotto trasformazioni continue dell'hamiltoniana che mantengano il gap diverso da zero e che preservano la simmetria \mathcal{T} . Gli stati di bordo possono essere determinati mediante il metodo di Jackiw e Rebbi che consiste nel descrivere il sistema mediante un'equazione di Dirac con profilo di massa a kink che cambia di segno al bordo. Utilizzando questo metodo si può mostrare che le eccitazioni di bordo sono fermioni in (2+1) dimensioni a massa nulla e spin ortogonale all'impulso. Anche in questo caso la classificazione è \mathbb{Z}_2 : un numero dispari di fermioni è stabile mentre un numero pari è instabile.

Il contenuto originale di questo lavoro di tesi si compone di due parti. Nella prima parte abbiamo studiato la teoria fermionica di bordo in presenza del campo elettromagnetico esterno. Come nel QHE, gli stati di bordo stabili sono associati ad un'anomalia ma questa deve cancellarsi per il sistema complessivo di bulk e bordo. In questo caso l'anomalia di parità in (2+1) dimensioni determina un'azione effettiva di Chern-Simons sul bordo che rompe le simmetrie \mathcal{P} e \mathcal{T} . Il nostro contributo è stato quello di risolvere l'ambiguità del segno dell'anomalia mediante la riduzione dimensionale di Jackiw e Rebbi dei fermioni da (3+1) a (2+1) dimensioni. Abbiamo mostrato che le anomalie di bordi opposti sono di segno opposto e quindi la cancellazione globale è possibile introducendo un termine θ , o termine magneto-elettrico, nell'azione effettiva. La seconda parte del lavoro di tesi consiste nel calcolo della funzione di partizione della teoria di bordo, ovvero di un fermione a massa nulla in (2+1) dimensioni con condizioni al contorno periodiche e antiperiodiche. Mediante la funzione di partizione abbiamo analizzato la stabilità degli stati di bordo: riformulando l'argomento di stabilità di Fu, Kane e Mele, abbiamo verificato l'esistenza di stati degeneri di Kramers nello spettro della teoria, che assicura la massa nulla delle eccitazioni e la stabilità della fase topologica \mathcal{T} -invariante.

Quantum Field Theory Techniques for 3D Topological Insulators

Candidate: *Jacopo Sisti*

Supervisor: *Dott. Andrea Cappelli*

Topological insulators belong to the so-called *topological states of matters*, that are characterized by the presence of a massive bulk and of massless states at the boundary. In the beginning of this thesis we introduce the best known topological state: the *quantum Hall effect* (QHE). This two-dimensional electron system at very low temperatures and high magnetic field, shows a transverse conductivity quantized in units of e^2/h in a surprisingly accurate way. The universal properties allow for a description of the excitations based on effective low-energy field theories. The bulk excitations are described by a (2+1)-dimensional Chern-Simons theory and the edge excitations by (1+1)-dimensional conformal field theories (CFT). In this theory, the chiral anomaly expresses the charge non-conservation at the boundary that is compensated by the Hall current in the bulk: in this way the anomaly cancels out in the whole system.

Time-reversal topological insulators in two space dimensions can be made by a pair of Hall states with opposite chiralities and spins, that realize a time-reversal invariant system. Since chiral-antichiral excitations interact and can become massive, these states may be unstable. Fu, Kane and Mele showed that an odd number of chiral-antichiral pairs of edge states is stable under time-reversal invariant perturbations but an even number is not (\mathbb{Z}_2 classification). Their argument is based on the degeneracy of half-integer spin states in time-reversal invariant systems (*Kramers' degeneracy*). This stability can be also understood by the partition function of the edge states.

3D topological insulators are not immediately related to Hall states because there are no Landau levels in three space dimensions. However using the Berry phase we can characterize those systems in terms of a topological number, that is invariant under continuous transformations of the hamiltonian that do not close the gap and preserve the time-reversal symmetry \mathcal{T} . The edge states can be determined by a general method introduced by Jackiw and Rebbi, that describes the bulk of the system by using a Dirac equation with kink-shaped mass, that changes sign at the boundary. In this way, one can show that the edge excitations are (2+1)-dimensional massless fermions with spin orthogonal to the momentum. Also in this case, the classification is \mathbb{Z}_2 : an odd number of fermions is stable and an even number is not.

The original contribution of this thesis is divided in two part. In the first one we studied the edge fermionic theory in presence of an electromagnetic background. As in the QHE case, the edge states are associated to an anomaly that must cancel out globally. In the case of 3D topological insulators the parity anomaly in (2+1) dimensions gives rise to the Chern-Simons effective action at the boundary that breaks the \mathcal{P} and \mathcal{T} symmetries. Our contribution was to solve the sign ambiguity of the anomaly using the Jackiw and Rebbi dimensional reduction from (3+1)-dimensional to (2+1)-dimensional fermions. We showed that the anomalies belonging to different boundaries have opposite sign and therefore the anomaly cancellation is possible by using a θ term in the bulk effective action. The second part of the work consists in the calculation of partition function of the boundary theory, namely of a massless fermion in (2+1) dimensions with both periodic and anti-periodic boundary conditions. Using this partition function we analysed the stability of the edge states: reformulating the stability argument given by Fu, Kane and Mele, we verified the existence of Kramers doublets in the spectrum of the theory, thus proving that the excitations are massless and stable under \mathcal{T} -invariant interactions.